Lokalna regularność słabych rozwiązań równań Naviera-Stokesa z ułamkową dyssypacją

Wojciech Ożański

University of Southern California

3 grudnia, 2020.

praca wspólna z Hyunju Kwon (Institute for Advanced Study, Princeton).

Równania Naviera-Stokesa

Trójwymiarowe nieściśliwe równania Naviera-Stokesa dla wektora prędkości $u : \mathbb{R}^3 \times (0, T) \to \mathbb{R}^3$ i cisnienia $p : \mathbb{R}^3 \times (0, T) \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u\big|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{NS}$$

Problem otwarty: Istnienie i jednoznaczność globalnych (w czasie) silnych rozwiązań.

Równania Naviera-Stokesa z ułamkową dyssypacją

$$\begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^s u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \tag{fNS}$$

gdzie $\widehat{(-\Delta)^s f}(\xi) = |\xi|^{2s} \hat{f}(\xi)$. Nierówność energetyczna:

$$\int |u(t)|^2 + 2 \int_0^t \int |\Lambda^s u|^2 \leqslant \int |u(s)|^2$$

Znane wyniki:

- Globalne i jednoznaczne silne rozwiązania dla $s \geqslant \frac{5}{4}$ (Lions '69)
- Dla $\frac{3}{4} < s < \frac{5}{4}$, $\mathcal{P}^{5-4s}(S) = 0$, gdzie

$$S := \{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,T) \colon u \text{ nie jest Hölderowsko ciągłe w żadnym otoczeniu } (x,t)\}$$

(Tang-Yu '15, Colombo-De Lellis-Massaccesi '20)

Motywacja

Pytanie.

A co z pochodnymi u?

Motywacja

Question.

A co z pochodnymi u?

Q1. Q1. Czy jeśli $u \in L^\infty(Q)$ dla pewnego cylindra Q, to ∇u, $D^2 u$ również są ograniczone?
Q2. Czy ∇u, $D^2 u$ posiadają jakiekolwiek ograniczenia *a priori* dla dowolnego słabego rozwiązania?

Leray-Hopf weak solution to hypodissipative Navier-Stokes

Definicja. u jest *słabym rozwiązaniem Leray'a-Hopfa* (HypoNS) z warunkiem początkowym $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{div} u_0 = 0$ jeśli

(1) u spełnia (HypoNS) w słabej postaci,

(2) u spełnia silną nierówność energetyczną,

$$\int |u(t)|^2 \mathrm{d}x + 2 \int_s^t \int |\Lambda^s u|^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \leqslant \int |u(s)|^2 \mathrm{d}x$$

dla prawie wszystkich $s \geqslant 0$ i wszystkich $t \geqslant s$.

Główny wynik (1/3)

Twierdzenie. [Kwon-O., arXiv:2010.12105]
Niech u będzie słabym rozwiązaniem Leray's-Hopfa (HypoNS) dla $\frac{3}{4} < s < 1$, spełniającym

$$\|u\|_{L^\infty_{t,x}(Q_1)} + \|u\|_{L^2_t W^{s,2}_x(Q_2)} + \|p\|_{L^1_{t,x}(Q_1)} + \|\nabla p\|_{L^1_{t,x}(Q_1)} + \|\mathcal{M}(\Lambda^s u)\|_{L^2(Q_2)} \\ + \|\mathcal{M}|\Lambda^s u|^{\frac{2}{1+\delta}}\|_{L^{1+\delta}(Q_2)} + \|\mathscr{M}_4|\Lambda^{2s-1}\nabla p|\|_{L^1(Q_2)} \leqslant c < \infty$$

dla $\delta = \frac{2s}{6-s}$. Wówczas u spełnia

$$\sup_{Q_1} |u(x,t)| + |\nabla u(x,t)| + |\nabla^2 u(x,t)| \leqslant C_0$$

z pewną stałą $C_0 = C_0(c,s)$.

Funkcje maksymalne

Definicja. *Funkcja maksymalna Hardy'ego-Littlewooda,*

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} |f(y)| \mathrm{d}y.$$

Dla ustalonego $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, *non-tangential maximal function z* otworem 1 względem Ψ,

$$\mathcal{M}_1^*(f;\Psi)(x) := \sup_{t>0,\, |y-x|\leqslant t} |\Psi_t * f(y)|$$

gdzie $\Psi_t(x) := t^{-3}\Psi(t^{-1}x)$.
Grand maximal function:

$$\mathscr{M}_N(f)(x) :=$$

$$\sup \left\{ \mathcal{M}_1^*(f;\Psi)(x) : \Psi \in \mathcal{S}, \int (1+|x|)^N \sum_{|\alpha|\leqslant N+1} |\partial^\alpha \Psi(x)| \mathrm{d}x \leqslant 1 \right\}.$$

Ograniczenia pochodnych rozwiązań równań Naviera-Stokesa

- Constantin '90 : $\nabla^2 u \in L^q(\mathbb{T}^3 \times (0,\infty))$, $q < \frac{4}{3}$.
- Lions '96 : Dla każdego słabego rozwiązania Leray'a-Hopfa ,

$$\nabla^2 u \in L^{\frac{4}{3},\infty}(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$$

jeśli ∇u_0 jest miarą Radona.

Ograniczenia pochodnych rozwiązań równań Naviera-Stokesa

- Constantin '90 : $\nabla^2 u \in L^q(\mathbb{T}^3 \times (0,\infty))$, $q < \frac{4}{3}$.
- Lions '96 : Dla każdego słabego rozwiązania Leray'a-Hopfa ,

$$\nabla^2 u \in L^{\frac{4}{3},\infty}(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$$

jeśli ∇u_0 jest miarą Radona.

- Vasseur '10: $\nabla^n u \in L^q_{\mathrm{loc}}, \quad q < \frac{4}{n+1}$
- Choi-Vasseur '14: $\nabla^2 u \in L^{\frac{4}{3},\infty}_{\mathrm{loc}}$, $\nabla^3 u \in L^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}$
- Vasseur-Yang '20 : Dla każdego *suitable weak solutions*,

$$\nabla^2 u \in L^{\frac{4}{3},q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)), \quad q > \frac{4}{3}.$$

Ułamkowy Laplasjan: operator nielokalny

Dla $s \in (0, 1)$,

$$(-\Delta)^s f(x) = C_s \,\mathrm{p.v.} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x) - f(z)}{|x - z|^{3+2s}} \,\mathrm{d}z$$

*C_s: stała normalizacyjna

Caffarelli-Silvestre

Przedłużenie

Niech $u^*(x, y)$ będzie zdefiniowany przez

$$u^*(x, y) := \tilde{C}_s \int_{\mathbb{R}^3} \frac{y^{2s}}{|(x - z, y)|^{n-2s}} u(z) \mathrm{d}z, \quad y > 0$$

Wówczas

- u^* jest przedłużeniem u do półprzestrzeni $\mathbb{R}^4_+$,

$$\lim_{y \to 0} u^*(x, y) = u(x)$$

Caffarelli-Silvestre

Przedłużenie

Niech $u^*(x,y)$ będzie zdefiniowany przez

$$u^*(x,y) := \tilde{C}_s \int_{\mathbb{R}^3} \frac{y^{2s}}{|(x-z,y)|^{n-2s}} u(z) \mathrm{d}z, \quad y > 0$$

Wówczas

- u^* jest przedłużeniem u do półprzestrzeni $\mathbb{R}^4_+$,

$$\lim_{y \to 0} u^*(x,y) = u(x)$$

- Ułamkowy Laplasjan można obliczyć ze wzoru

$$(-\Delta)^s u(x) = -\overline{C}_s \lim_{y \to 0^+} y^a \partial_y u^*(x,y), \quad s \in (0,1)$$

- Równoważność energii,

$$\int |\Lambda^s u|^2 dx = \overline{C}_s \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} y^a |\overline{\nabla} u^*|^2 dx dy,$$

gdzie $a = 1-2s$, $\Lambda^s = (-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ i $\overline{\nabla} = (\nabla_x, \partial_y)$

Suitable weak solution równań Naviera-Stokesa z ulamkową dyssypacją

Suitable weak solution (u, p) równania (HypoNS) to słabe rozwiązanie Leray'a-Hopfa spełniające warunki:

(1) para (u, p) spełnia (HypoNS) w sensie dystrybucji,

(2) dla każdego $\xi = \xi(x, y, t) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^4 \times (0, T))$, *lokalna nierówność energetyczna*

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(t)|^2 \xi(t)|_{y=0} + 2\overline{C}_s \int_0^t \int_{\mathbb{R}^4_+} y^a |\overline{\nabla} u^*|^2 \xi \\ \leqslant \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla \xi|_{y=0}) \left(|u|^2 + 2p \right) + \overline{C}_s \int_0^t \int_{\mathbb{R}^4_+} |u^*|^2 \overline{\mathrm{div}} (y^a \overline{\nabla} \xi) \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 \left((\partial_t \xi|_{y=0}) + \lim_{y \to 0^+} y^a \partial_y \xi \right)$$

zachodzi dla wszystkich $t \in (0, T)$.

Główny wynik (2/3)

Twierdzenie. [Kwon-O., arXiv:2010.12105]
Dla każdego *suitable weak solution* równań (HypoNS) dla $s \in (\frac{3}{4}, 1)$,

$$\|\nabla^k u\|^p_{L^{p,\infty}(t_0,T;L^{p,\infty}(K))} \lesssim_{k,s} \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{|K|}{t_0^{2-\frac{1}{s}}}$$

dla każdego $t_0 \in (0, T)$ i każdego otwartego i ograniczonego zbioru $K \subset \mathbb{R}^3$, gdzie

$$p = \frac{2(3s-1)}{k+2s-1}, \quad k = 1, 2.$$

- W przypadku $s = 1$, mamy $(k, p) = (1, 2), (2, \frac{4}{3})$

Niezmienność równań Naviera-Stokesa

- Skalowanie

$$
\begin{aligned}
u_\lambda(x,t) &= \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \lambda > 0 \\
p_\lambda(x,t) &= \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t).
\end{aligned}
$$

- transformacja Galileusza

$$
\begin{aligned}
u_c(x,t) &= u(x + c(t), t) - c'(t), \\
p_c(x,t) &= p(x + c(t), t).
\end{aligned}
$$

Navier-Stokes: podejście Vasseur'a

Załóżmy, że zachodzi następujący warunek na lokalną gładkość (Źle!):

$\exists\, \epsilon > 0$ takie, że

$$\int_{Q_1(x,t)} |\nabla u|^2 \leqslant \epsilon \implies |\nabla^2 u(x,t)| \leqslant C$$

Navier-Stokes: podejście Vasseur'a

Załóżmy, że zachodzi następujący warunek na lokalną gładkość (Źle!):

$\exists\, \epsilon > 0$ takie, że

$$\int_{Q_1(x,t)} |\nabla u|^2 \leqslant \epsilon \implies |\nabla^2 u(x,t)| \leqslant C$$

Wówczas, dla $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
&|\{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (\lambda^2, \infty) : |\nabla^2 u(x,t)| \geqslant C\lambda^{-3}\}| \\
&\quad \leqslant \left| \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (\lambda^2, \infty) : \fint_{Q_\lambda(x,t)} |\nabla u(y,s)|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \geqslant \epsilon\lambda^{-4} \right\} \right| \\
&\quad \leqslant \frac{\lambda^4}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^3 \times (\lambda^2, \infty)} \left(\fint_{Q_\lambda(x,t)} |\nabla u(y,s)|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\quad \lesssim \lambda^4 \|\nabla u\|^2_{L^2_{t,x}} \leqslant \lambda^4 \|u_0\|^2_{L^2}.
\end{aligned}$$

- $p = \frac{4}{3}$ jest ustalony przez warunek, że $|\nabla^2 u|^p \underset{\text{ma takie samo skalowanie}}{\sim} |\nabla u|^2$.

Navier-Stokes: podejście Vasseur'a

Uwagi. $\nabla^2 u \in L^{\frac{4}{3},\infty}_{\mathrm{loc}}$ jeśli tylko założymy warunek "małości" na wielkości, które

- maja takie samo skalowanie jak $|\nabla u|^2$
- są całkowalne na $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$

Takie wielkości nazywamy wielkościami z optymalnym skalowaniem.

Navier-Stokes: podejście Vasseur'a

Uwagi. $\nabla^2 u \in L^{\frac{4}{3},\infty}_{\mathrm{loc}}$ jeśli tylko założymy warunek "małości" na wielkości, które

- maja takie samo skalowanie jak $|\nabla u|^2$
- są całkowalne na $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$

Takie wielkości nazywamy wielkościami z optymalnym skalowaniem.

Przykład.

- $|\Delta p|$ ma optymalne skalowanie gdyż $|\Delta p| \underset{\text{taka sama skala}}{\sim} |\nabla u|^2$ and $\|\Delta p\|_{L^1(\mathbb{R}^3\times(0,T))} \lesssim \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3\times(0,T))}$.
- $|u|^{\frac{10}{3}}$ nie ma optymalnego skalowania gdyż skaluje się inaczej.

Navier-Stokes: podejście Vasseur'a

Cel: Otrzymać lokalną gładkość z warunkiem na "małość" tylko wielkości z optymalnym skalowaniem.

Pomysł: lokalna regularność dla rozwiązania z transformacją Galileusza

Twierdzenie. [Choi-Vasseur] Istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że jeśli gładkie rozwiązanie (u, p) spełnia

$$\int_{\mathbb{R}^3} u(t,x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall t \in (-4, 0)$$
$$\int_{Q_2} |\nabla u|^2 + |\nabla^2 p| \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

to

$$\|\nabla^n u\|_{L^\infty(Q_1)} \leqslant C_n.$$

gdzie $\varphi \in C_c^\infty(B_1; [0,1])$ spełnia $\int \varphi \, \mathrm{d}x = 1$.

Hypodissipative NS: Twierdzenie Tang-Yu of lokalnej gładkości

Twierdzenie. [Tang & Yu (2015) Istnieje $\varepsilon = \varepsilon(s) > 0$ takie, że jeśli *suitable weak solution* (u, p) równań (HypoNS) spełnia

$$\sup_{t\in(-2^{2s},0)} \int_{B_2} |u(x,t)|^2\, dx + \int_{Q_2^*} y^a |\overline{\nabla} u^*|^2\, dXdt + \left(\int_{Q_2} |u|^3 \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\int_{-2^{2s}}^{0} \int_{B_2} |p(x,t)| dxdt \right)^2 \leqslant \varepsilon,$$

to

$$\|u\|_{L^\infty(Q_1)} \leqslant 1.$$

Lokalna gładkość z zerową średnią

Twierdzenie. [Kwon-O.] Istnieje $\varepsilon = \varepsilon(s) > 0$ takie, że jeśli *suitable weak solution* (u, p) równań (HypoNS) spełnia

$$\int u(x,t)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall t \in (-5^{2s}, 0)$$

$$\int_{Q_5^*} y^a |\overline{\nabla} u^*|^2 + \int_{-5^{2s}}^0 \int_{B_5} \int_{B_5} \frac{|u(x,t) - u(y,t)|^2}{|x-y|^{3+2s}} \\ + \int_{Q_5} (\mathcal{M}|\Lambda^s u|^{\frac{2}{1+\delta}})^{1+\delta} + |\Lambda^{2s-1}\nabla p| + |\mathscr{M}_4(\Lambda^{2s-1}\nabla p)| \leqslant \varepsilon,$$

gdzie $\delta = \frac{2s}{6-s}$, to

$$\|\nabla^k u\|_{L^\infty(Q_{\frac{1}{2}})} \leqslant C_0, \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

Wniosek - częściowa regularność

Wniosek. [Kwon-O.] Istnieje $\varepsilon = \varepsilon(s) > 0$ takie, że jeśli *suitable weak solution* (u, p) równań (HypoNS) spełnia

$$\int_{Q_5^*} y^a |\overline{\nabla} u^*|^2 + \int_{-5^{2s}}^0 \int_{B_5} \int_{B_5} \frac{|u(x,t) - u(y,t)|^2}{|x-y|^{3+2s}} + \int_{Q_5} (\mathcal{M}|\Lambda^s u|^{\frac{2}{1+\delta}})^{1+\delta}$$
$$+ \int_{Q_5} \Big(|u|^3 + |p|^{3/2} + |\Lambda^{2s-1} \nabla p| + |\mathscr{M}_4(\Lambda^{2s-1} \nabla p)| \Big) \leqslant \varepsilon,$$

gdzie $\delta = \frac{2s}{6-s}$, to

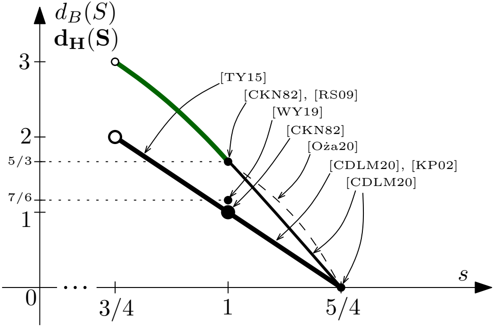
$$\|\nabla^k u\|_{L^\infty(Q_{\frac{1}{2}})} \leqslant C_0, \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

Wniosek - częściowa regularność

W szczególności jeśli

$$S := \{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,T) \colon \text{jakakolwiek pochodna przestrzenna } u \text{ jest nieograniczona w dowolnym otoczeniu } (x,t)\}$$

to $\mathcal{P}^{5-4s}(S) = 0$ i $d_B(S \cap \{t > t_0\}) \leqslant \frac{1}{3}(15 - 2s - 8s^2)$ dla każdego $t_0 \in (0,T)$.



Główny wynik (3/3) - Globalna calkowalność ciśnienia

W przypadku równań Naviera-Stokesa,

$$\|(-\Delta)p\|_{\mathcal{H}^1} = \|\partial_i u_j \partial_j u_i\|_{\mathcal{H}^1} \lesssim \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

W przypadku hypodyssypatywnym ($s \in (3/4, 1)$),

$$(-\Delta)^s p = \Lambda^{2s-2}(\partial_i u_j \partial_j u_i).$$

Główny wynik (3/3) - Globalna calkowalność ciśnienia

W przypadku równań Naviera-Stokesa,

$$\|(-\Delta)p\|_{\mathcal{H}^1} = \|\partial_i u_j \partial_j u_i\|_{\mathcal{H}^1} \lesssim \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

W przypadku hypodyssypatywnym ($s \in (3/4, 1)$),

$$(-\Delta)^s p = \Lambda^{2s-2}(\partial_i u_j \partial_j u_i).$$

Twierdzenie. [Kwon-O., arXiv:2010.12105] Dla $s \in (0,1)$,

$$\|(-\Delta)^s p\|_{\mathcal{H}^1} \lesssim_s \|\Lambda^s u\|_{L^2}^2$$
$$\|\mathcal{R}^n(-\Delta)^s p\|_{\mathcal{H}^1} \lesssim_{s,n} \|\Lambda^s u\|_{L^2}^2$$

dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 0$, gdzie $\widehat{\mathcal{R}f}(\xi) = -i\xi/|\xi|\,\hat{f}(\xi)$.

Globalna calkowalność ciśnienia

Inspiracja: ograniczenia typu Kenig-Ponce-Vega:

$$\|\Lambda^\beta(fg) - f\Lambda^\beta g - g\Lambda^\beta f\|_{L^p} \lesssim_{\beta,\beta_1,\beta_2,p,p_1,p_2} \|\Lambda^{\beta_1} f\|_{L^{p_1}} \|\Lambda^{\beta_2} g\|_{L^{p_2}}$$

gdzie $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $0 \leqslant \beta, \beta_1, \beta_2 \leqslant 1$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ oraz $1 \leqslant p, p_1, p_2 \leqslant \infty$.

Globalna calkowalność ciśnienia

Inspiracja: ograniczenia typu Kenig-Ponce-Vega:

$$\|\Lambda^\beta(fg) - f\Lambda^\beta g - g\Lambda^\beta f\|_{L^p} \lesssim_{\beta,\beta_1,\beta_2,p,p_1,p_2} \|\Lambda^{\beta_1} f\|_{L^{p_1}} \|\Lambda^{\beta_2} g\|_{L^{p_2}}$$

gdzie $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $0 \leqslant \beta, \beta_1, \beta_2 \leqslant 1$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ oraz $1 \leqslant p, p_1, p_2 \leqslant \infty$.

Mamy $(-\Delta)^s p = \Lambda^{2s-2} \operatorname{div} \operatorname{div}(u \otimes u)$.

Korzystamy z rozwinięć Littlewood-Paley dla $\Lambda^{2s-2} \operatorname{div} \operatorname{div} \sim \Lambda^\beta$ i używamy faktu $\operatorname{div} u = 0$.

Główny wynik (1/3), powtórzenie

Twierdzenie. [Kwon-O., arXiv:2010.12105]
Załóżmy, że słabe rozwiązanie (u, p) równań (HypoNS) dla $\frac{3}{4} < s < 1$ spełnia

$$\|u\|_{L^\infty_{t,x}(Q_1)} + \|u\|_{L^2_t W^{s,2}_x(Q_2)} + \|p\|_{L^1_{t,x}(Q_1)} + \|\nabla p\|_{L^1_{t,x}(Q_1)} + \|\mathcal{M}(\Lambda^s u)\|_{L^2(Q_2)} \\ + \|\mathcal{M}|\Lambda^s u|^{\frac{2}{1+\delta}}\|_{L^{1+\delta}(Q_2)} + \|\mathscr{M}_4|\Lambda^{2s-1}\nabla p|\|_{L^1(Q_2)} \leqslant c < \infty$$

dla $\delta = \frac{2s}{6-s}$. Wówczas

$$\sup_{Q_1} |u(x,t)| + |\nabla u(x,t)| + |\nabla^2 u(x,t)| \leqslant C_0$$

gdzie jest $C_0 = C_0(c, s)$ jest pewną stałą.

Szkic dowodu

Zauważmy, że $u\phi_2$ spełnia

$$
\begin{aligned}
(\partial_t + \Lambda^{2s})(u\phi_2) &= \nabla \cdot F + [\Lambda^{2s}, \phi_2]u \\
&\quad + \Big(u \otimes u : \nabla\phi_2 - \nabla\phi_2 \mathcal{R}_{ij}(u_i u_j \phi_{\frac{3}{2}}) + u\partial_t\phi_2\Big) + \mathit{error}
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
F := -(u \otimes u\phi_2) + \phi_2 \mathcal{R}_{ij}(u_i u_j \phi_{\frac{3}{2}})\mathrm{Id}.
$$

Szkic dowodu

Ograniczenia komutatorów

$$(\partial_t + (-\Delta)^s)(u\phi) - \phi(\partial_t u + (-\Delta)^s u) = u\partial_t\phi + [(-\Delta)^s, \phi]u$$

Lemat. [Kwon - O. '20]
Niech $s \in (\frac{1}{2}, 1)$. Niech $\phi \in C_c^\infty(B_R \times (-T, 0])$ i $B_R \subset B_{R_0}$.
Wówczas, dla każdego $\delta \in (0, 2-2s)$, $r \in [1, \infty]$ i $p \in (1, \infty)$, istnieje rozkład

$$[(-\Delta)^s, \phi]u = I_{\mathrm{loc}} + I_{\mathsf{tail}}$$

gdzie f i g spełniają

$$\|I_{\mathrm{loc}}\|_{L^r(-T,0;L^p(\mathbb{R}^3))} \lesssim_\delta \|u\|_{L^r(-T,0;W^{2s-1+\delta,p}(B_{R_0}))}$$

$$\|I_{\mathsf{tail}}\|_{L^2(-T,0;W^{k,\infty}(\mathbb{R}^3))} \lesssim_{k,s} \|\mathcal{M}(\Lambda^s u)\|_{L^2([-T,0]\times B_R)} + \|u\|_{L^2(-T,0;L^1(B_R))}$$

dla wszystkich liczb całkowitych $k \geqslant 0$.